

Würfel, Spiele und 'Die Siedler von Catan'

Mirko Junge

<http://www.DrJunge.de>

<mailto:mj@DrJunge.de>

23. August 2002

Inhaltsverzeichnis

1 Würfel und Spiele

1.1	Einführung	1
1.2	Verteilung	2
1.2.1	Vorüberlegungen	2
1.2.2	Faltung	2
1.2.3	Anwendung	4
1.3	Reihenfolge	4
1.4	Einführung und Anwendung	4
1.4.1	Berechnung bei 'gleichverteilten Verteilungen'	4
1.4.2	Berechnung bei 'nicht gleichverteilte Verteilung'	5

2 'Die Siedler von Catan' House Rules:

Mega-Catan		
2.1	Material	6
2.1.1	Material der Spielkästen	6
2.1.2	Benötigtes Material	6
2.2	Mega-Catan, Standard, 6 Spieler	7
2.3	Die Welt ist rund	7
2.4	Verschärft	7
2.5	Hammerhart	8
2.6	D-12 Mania	8
2.7	D-12 Madness	8

1 Würfel und Spiele

1.1 Einführung

Es gibt zahlreiche Spiele, bei denen Würfel eine entscheidende Rolle spielen. Allgemein kann man unterscheiden:

- Würfel als Fortbewegungsallocator
(z.B. Monopoly, Mensch ärgere Dich nicht)
- Würfel als Rohstoffzuteiler
(z.B. Risiko, Siedler von Catan)
- Würfel als Spielstein
(z.B. Chase)

Das Spiel mit dem die Verteilungen der Wurfresultate so wichtig wurden, daß sich ein genaueres Studium der Verteilungen lohnt heißt 'Die Siedler von Catan': Das Spiel wird mit zwei 6er Würfeln gespielt, wobei die geworfenen Augen zu einer Zahl addiert werden. Das Spielfeld besteht aus einer Fläche, die aus vielen gleichgroßen,

verschiedenen bedruckten Sechsecken, die die unterschiedlichen Rohstoffe symbolisieren, zusammengelegt wird. Auf jedes der Sechsecke wird jeweils ein Zahlen-Chip von 2 bis 12 gelegt¹. Besitzt man an der Ecke eines Sechsecks eine Siedlung bzw. eine Stadt deren Zahl gerade gewürfelt wurde, so erhält man eine bzw. zwei Einheiten des entsprechenden Rohstoffs. In den zwei Spielphasen braucht man die einzelnen Rohstoffe in unterschiedlichen Kombinationen².

Auch wenn dies eine äußerst rudimentäre und keinesfalls eindeutige Beschreibung des Spiels ist, so wird doch deutlich, daß die Wahrscheinlichkeiten die entsprechenden Zahlen auf den Rohstoff-Sechsecken zu würfeln von elementarer Bedeutung für das Spiel sind.

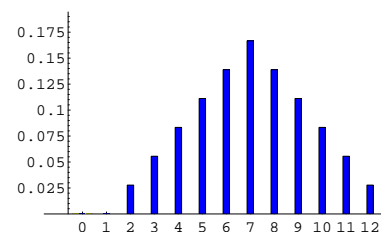
Zu Beginn des Spiels muß der erste Spieler eine Siedlung und eine Straße setzen. Da es für die Siedlung im Verlauf des Spieles bei entsprechender Würfelzahl die angrenzenden Rohstoffe gibt, wird man bemüht sein die erste Siedlung so zu plazieren, daß sie möglichst an Sechsecke mit den häufiger auftretenden Zahlen liegt, also 6 und 8³. Reihum setzen die anderen Spieler ihre erste Siedlung. Der letzte Spieler setzt auch gleich seine zweite Siedlung und zweite Straße, dann der vorletzte..., bis der erste Spieler wieder an der Reihe ist. Eine Besonderheit der zweiten Anfangsrunde besteht darin, daß man die entsprechenden Rohstoffkarten von allen an die Siedlung angrenzenden Sechsecken als eine Art 'Start-Kapital' erhält.

Aus dem ganzen Procedere ist leicht zu sehen, daß mit steigender Zahl der Spieler derjenige, der als erster und als letzter seine Siedlungen setzen muß, immer stärker benachteiligt wird: Zum einen wird die Zahl der Spieler, die ihm seine Ausgangssituation verbauen können immer größer, zum anderen ist die Auswahl am Schluß immer geringer und vor allem aber stehen ihm immer schlechtere Ecken zur Verfügung. Auch ist eine strategische Kombination der beiden Anfangzüge, um so den Grundstein für die längste Handelsstraße zu

¹Die Zahlen-Chips sind nicht gleichverteilt: Im Grundspiel gibt es jeweils ein Mal die 2 und die 12, alle anderen Zahlen sind doppelt vorhanden. Auf die Würfelwahrscheinlichkeiten hat diese Verteilung jedoch keinen Einfluß.

²Im ersten Teil des Spiels baut man hauptsächlich Verbindungen, also Straßen bzw. Schifffahrtswege (Holz & Lehm bzw. Holz & Wolle) und Siedlungen (Holz & Lehm & Getreide & Wolle), in dem zweiten Städte (3×Erz & 2×Getreide)

³Die Zahl 7, die bei der Summe von zwei 6er Würfeln die häufigste Kombination ist, hat eine besondere Bedeutung und kann im Standard-Spiel nicht auf einem Rohstoff-Sechseck liegen. Graphisch erhält man für die Verteilung:



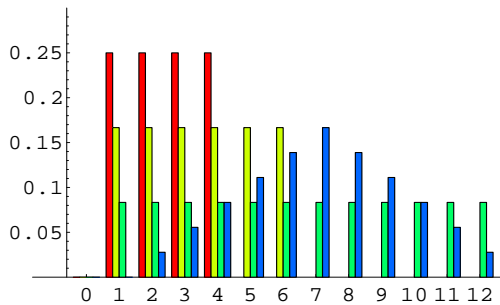
legen, immer schwieriger.⁴

Um den Ausgleich dieses Nachteils soll es in den folgenden Zeilen gehen. Es wird versucht durch eine Veränderung der Verteilung des Würfelergebnisses das Spiel fairer zu gestalten. Hierzu gibt es grundsätzlich verschiedene Möglichkeiten, die sich nicht gegenseitig ausschließen:

1. Veränderung der festen Verteilung der Würfelergebnisse in eine andere feste Verteilung
2. Freie Wahl des Würfelergebnisses in einem Teil der Fälle⁵ oder sogar allen Fällen.
3. Veränderung der Reihenfolge der Spieler in jeder Runde
4. Veränderung der festem Zahlen-Chip/Rohstoff-Sechseck Kombinationen im Laufe des Spiels.

1.2 Verteilung

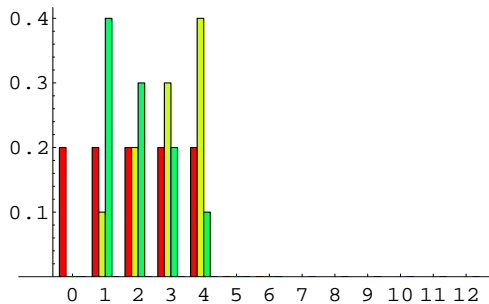
Für die Verteilungsfunktion der Augenzahlen von unterschiedlichen Würfeln erhält man die folgenden Graphen:



Die roten Balken geben die Wahrscheinlichkeiten für einen vierseitigen Würfel wieder, die gelben für einen 6 seitigen und die grünen für einen 12 seitigen. Die blauen Baken sind die graphische Representation der Verteilung der Summe von zwei 6 seitigen Würfeln. Mit Hilfe dieser Funktionen lassen sich die Erwartungswerte, also die mittleren Wahrscheinlichkeiten der Würfegergebnisse beschreiben. Die Verteilungsfunktion ist die charakteristische Eigenschaft eines Würfels. Durch Summation mehrerer Würfel lassen sich verschiedene Verteilungsmuster bilden. Eine einfache Methode ein gegebenes Verteilungsmuster zu approximieren besteht in der Verwendung viel-seitiger Würfel. Symmetrische, reguläre, polyhedrische Würfel gibt es mit 4, 6, 8, 12, 20, 24, 30, 48, 60 und 120 Seiten[1]. Desweiteren gibt es noch aus Dreiecken, sowie aus Trapezoiden zusammengesetzte Würfel.

1.2.1 Vortüberlegungen

Sei D_i die Zahl der unterschiedlichen Seiten des Würfels i , $d_{i,j}$ deren Ausprägung und $p_{i,j}$ deren Wahrscheinlichkeit, $j = 2, \dots, \max(D_i)$. Für die Betrachtungen über die Verteilungen der Summe von Würfeln werden die folgenden 3 Würfel und ihre additiven Kombinationen exemplarisch untersucht:



⁴Es gibt Leute die behaupten, daß man bei gleichstarken Siedler-Spielern nur mit der längsten Handelsstraße und/oder der größten Rittermacht gewinnen kann. Wobei anzumerken ist, daß bei gleichstarken Spielern einem Spieler nur in den seltensten Fällen gelingen wird, sowohl die längste Handelsstraße als auch die größte Rittermacht zu erhalten.

⁵Dies kann z.B. dadurch geschehen, daß eine Würfelseite blank ist, also keine Augen enthält, siehe unten.

Bei dem roten Würfel handelt es sich um einen gleichverteilten 5-seitigen Würfel⁶. Also:

$$D_1 = 5, \quad d_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, \quad p_{1,j} = 1/5, \quad j = 1, \dots, 5 \quad (1)$$

Die grüne (Würfel 2) und die gelbe (Würfel 3) Verteilung sind Rampenfunktionen⁷, die mit Hilfe eines 10-seitigen Würfels gebildet werden können. Auch ein 10-seitiger Würfel kann, entsprechend der Abhandlung in der letzten Fußnote, z.B. durch einen 20zig-seitigen Würfel gebildet werden. Hier ist

$$D_2 = 4, \quad d_2 \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad p_2 = [1/10, 2/10, 3/10, 4/10] \quad (2)$$

$$D_3 = 4, \quad d_3 \in \{4, 3, 2, 1\}, \quad p_3 = [4/10, 3/10, 2/10, 1/10] \quad (3)$$

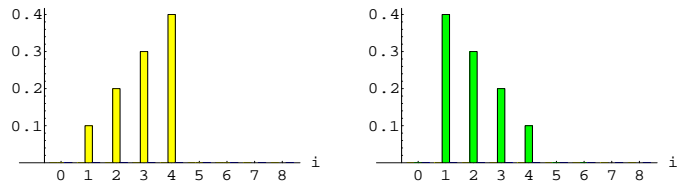
1.2.2 Faltung

Graphisch kann man sich das Faltungsintegral wie folgt verdeutlichen: Die beiden Funktionen werden sozusagen aneinander vorbeigeschoben und die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten miteinander multipliziert. Durch Integration von $f(t-u)g(u)$ erhält man den entsprechenden Wert des Faltungsintegrals bzw. durch Summation von $f(j-i)g(i)$ erhält man die Faltungssumme.

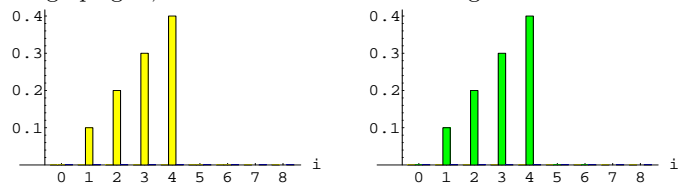
Definition 1 (Faltung, diskret) Seien $f(j)$ und $g(j)$ abschnittsweise diskrete Funktionen, so ist die Faltung der Funktionen definiert als

$$f(j) \star g(j) = \sum_{i=0}^j f(j-i)g(i) \quad (4)$$

Betrachtet werden der 'gelbe' ($g(i)$) und der 'grüne' ($f(j-i)$) Würfel (siehe Kap. 1.2.1). Für die Funktionen $g(i)$ und $f(i)$ erhält man die folgenden Darstellungen:



Durch den Term $j-i$ im Funktionsargument der Funktion f wird diese gespiegelt, so daß man für $i=0$ das folgende 'Bild' erhält:

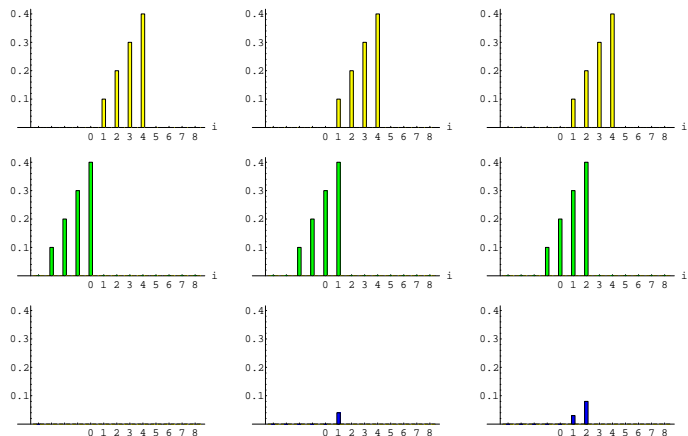


Diese beiden Funktionen werden, wie oben beschrieben aneinander 'vorbeigeschoben'.

⁶Der Einfachheit halber wurde ein Würfel mit 5 Seiten gewählt, dieser wäre jedoch ein nicht symmetrischer, nicht regulärer und nicht polyhedrischer Würfel und damit nach der Arbeit von Klaus Æ. Mogensen[1] nicht sicher fair. Markiert man jeweils 4 Seiten eines fairen, 20zig-seitigen Würfels mit der gleichen Zahl, so erhält man bezogen auf die Wahrscheinlichkeiten einen 5-seitigen Würfel. Ein 20zig-seitiger Würfel kann ein symmetrischer, regulärer, polyhedrischer Würfel und somit fair sein. Ein aus ihm gewonnener '5-seitige Würfel' wäre ebenfalls fair. q.e.d.

⁷Rampenfunktionen haben besondere Eigenschaften in bezug auf die Faltung, die sie für eine graphische Veranschaulichung besonders geeignet erscheinen lassen (siehe unten).

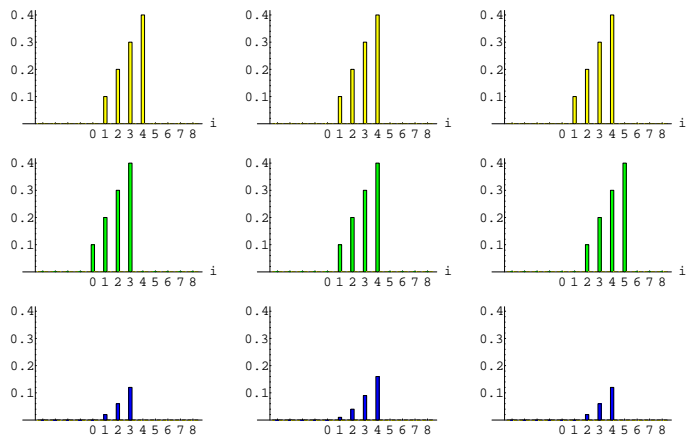
Für die Summenwerte 1, 2 und 3 erhält man die folgenden Spalten: den:



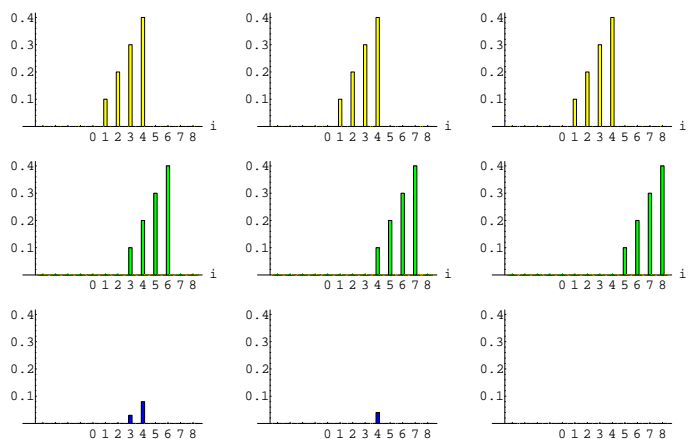
n	Faltungssumme	Dreiecks-Verteilung
2	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
3	$\frac{11}{100}$	$\frac{19}{150}$
4	$\frac{1}{5}$	$\frac{16}{75}$
5	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$
6	$\frac{1}{5}$	$\frac{16}{75}$
7	$\frac{11}{100}$	$\frac{19}{150}$
8	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$

Den Wert der Faltung erhält man durch Summation der einzelnen blauen Säulen in jedem Funktionsdiagramm. Für den Summenwert von 1: 0, für 2: $1/25$, und für 3: $11/100$.

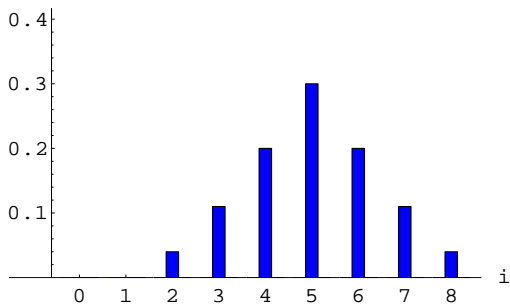
Entsprechende Diagramme kann man für Summenwerte von 4, 5, 6



und 7, 8, 9 erstellen:



Die Faltungssumme läßt sich als Diagramm darstellen:

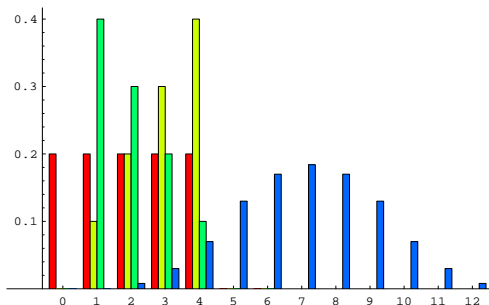


Aus den Rampen-Verteilungen der beiden Würfel ist durch die Summation der beiden Würfelwerte fast⁸ eine Dreiecksverteilung gewor-

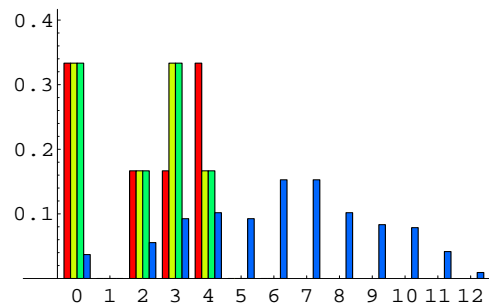
⁸Die Werte für 3, 4 und 6, 7 sind mit $11/100$ bzw. $1/5$ kleiner als die der durch Maximum- und Minimum-Wert beschriebenen Dreiecksverteilung

Bildet man die Summe aller drei Würfel (siehe Kap. 1.2.1), so müssen für die Berechnung der Verteilungsfunktion die drei Verteilungsfunktionen der einzelnen Würfel miteinander gefaltet werden. Aufgrund der Assoziativität der Faltung können erst zwei Verteilungen miteinander gefaltet werden und dann dieses Ergebnis mit der Verteilungsfunktion des dritten Würfels.

Man erhält (rot, gelb, grün die Würfel, blau das Faltungsergebnis):



Durch Kombination zweier oder mehrerer nicht gleich verteilter Würfel lassen sich auch bizarreste Verteilungsmuster erzeugen bzw. approximieren. In der folgenden Abbildung sind drei 6er Würfel (rot, gelb, grün) mit den Seiten (0, 0, 2, 3, 4, 4), (0, 0, 2, 3, 3, 4) und (0, 0, 2, 3, 3, 4) miteinander gefaltet worden:

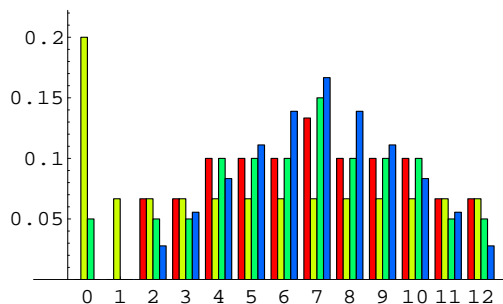


($19/150$ bzw. $16/75$).

1.2.3 Anwendung

Die Betrachtungen in den letzten Abschnitten wurden angestellt, um das Spiel ‘Die Siedler von Catan’ fairer zu gestalten. Die Summe der zwei 6er-Würfel mit denen normalerweise gespielt wird, lassen sich durch eine Dreieckverteilung mit 6 Wahrscheinlichkeitsstufen (in Bild blau) beschreiben.

Eine Glättung dieser Verteilung durch Reduktion der Wahrscheinlichkeitsstufen von 6 auf 3 ($1/20$, $2/20$, $3/30$) unter Verwendung eines 20-seitigen Würfel kann wie folgt aussehen (im Bild grün)⁹:



Hierbei beträgt, bei einem fairen Würfel, die Wahrscheinlichkeit für jede Seite des 20-zig-seitigen Würfels $1/20$. Eine beliebige Verteilung kann also durch eine Quantisierung in 20 Zwanzigstel approximiert werden.

Eine Approximation der dreistufigen Verteilung ohne leere Würfelseite kann man durch Verwenden eines dreißig seitigen Würfels erreichen (im obigen Bild rot). Hier betragen die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten der Stufen $2/30$, $3/30$ und $4/30$. Als Beispiel für eine Gleichverteilung mit hohem Wahlanteil (leere Würfelseiten) ist im Bild mittels eines dreißig seitigen Würfel konstruiert (gelb, Wahrscheinlichkeiten von $6/30 = 1/5$ für die freie Wahl und $2/30 = 1/15$ für eine fest vorgegebene Zahl).

Allgemein gilt, je mehr Seiten der Würfel hat, desto besser die Approximation. Jedoch ist zu beachten, daß ganz abzusehen von der Schwierigkeit der Beschaffung, die Fairnis eines 100¹⁰- oder gar 120-seitigen Würfels deutlich schwieriger zu verifizieren ist, als die eines 12-, 20- oder 30-seitigen.

1.3 Reihenfolge

1.4 Einführung und Anwendung

Bei Mehrpersonenspielen kann die Reihenfolge mit der die Spieler ihre Züge ausführen dürfen von entscheidender Bedeutung sein. So hat z.B. bei Monopoly[8][9] der Spieler, der zuerst auf ein Feld gelangt immer die Möglichkeit dies zu kaufen. Dieser Vorteil verliert sich erst nach vielen Runden, zu einem Zeitpunkt zu dem bereits alle Grundstücke verkauft sind. Ein ausgeglicheneres Spiel würde sich ergeben, wenn zu Beginn jeder Runde die Reihenfolge neu festgelegt werden würde. Die folgende Vorschrift ermöglicht dies:

- Jeder Spieler erhält einen Würfel mit dem die Position innerhalb der Runde festgelegt wird.
- Am Anfang der Runde würfelt jeder Spieler mit dem vor ihm liegenden Positionswürfel die Position seien links Nachbarns. Er gibt den Würfel mit dem Resultat an diesen weiter. Die niedrigste Augenzahl beginnt.
- Haben zwei Würfel die gleiche Augenzahl wird zwischen diesen Personen ein Stechen durchgeführt. Beginnend mit der niedrigsten gleichen Augenzahl. Entsprechend des Ausgangs werden die Spieler in die Runde eingegliedert.

Mit dieser einfachen Vorschrift lassen sich tatsächlich reihenfolgenabhängige Spiele deutlich fairer gestalten. Zwanglos drängen sich die folgenden Fragen auf: Wie oft kommt es vor das zwei Personen die gleiche Zahl gewürfelt haben und die Reihenfolge durch ein Stechen ermittelt werden muß? Was passiert mit der Häufigkeit dieses Ereignisses, wenn man 4 seitige, 6 seitige, 12 seitige oder gar 20 seitige Würfel benutzt? Wäre es sinnvoller die Summe zweier 6 seitiger Würfel statt eines 12 seitigen zu benutzen?

1.4.1 Berechnung bei ‘gleichverteilten Verteilungen’

Für den Fall daß es nach den Würfeln für die Rangfolge kein Stechen geben muß, ist es erforderlich daß alle n Personen unterschiedliche Zahlen würfeln. Für einen m -seitigen Würfel bei dem jede der m Seiten gleich wahrscheinlich ist, erhält man für die Wahrscheinlichkeit eines Stechens ($P_{stechen}$) die folgende Formel:

$$P_{stechen} |_{n=2} = 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right) \quad (5)$$

$$P_{stechen} |_{n=3} = 1 - \left(\left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m}\right)\right) \right) \quad (6)$$

$$P_{stechen} = 1 - \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{m}\right) \quad (7)$$

Für die Herleitung betrachte man zuerst den den zwei Personenfall ($n = 2$). Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit¹¹ legt man den Wurf des Spielers als gegeben fest, der den ersten Wurf macht.¹² Damit der zweite Spieler nicht die gleiche Zahl wie der erste würfelt muß er eine andere Zahl werfen. Die Wahrscheinlichkeit mit der der erste Spieler eine bestimmte Zahl wirft sei p , so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, daß der zweite Spieler diese Zahl nicht wirft zu $1 - p$. Bei einem fairen m -seitigen Würfel gilt $p = 1/m$. Die Wahrscheinlichkeit eines Stechens beschreibt die Wahrscheinlichkeit das die beiden Würfel eben nicht unterschiedlich sind. Somit ergibt sich die Gleichung 5.

Für den Fall von drei Spielern ($n = 3$) darf der dritte Spieler nicht die Augenzahl des ersten und auch nicht die des zweiten würfeln. Heraus ergibt sich zwanglos Gleichung 6.

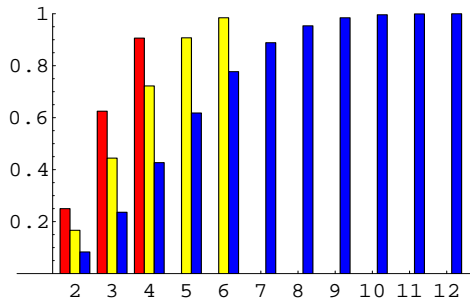
¹¹Es ist hier wichtig zu beachten, daß im Folgenden von sogenannten fairen Würfeln ausgegangen wird, bei denen jede der Würfelseiten gleich wahrscheinlich ist. Es sei darauf hingewiesen, daß diese Annahme *nicht* für die Summe zweier Würfel gilt (siehe unten)!

¹²Dieser Wurf muß nicht zeitlich vor dem anderen Wurf liegen. Es wird nur willkürlich ein Spieler ausgewählt, dessen Wurf als Bezugsgröße gewählt wird.

⁹Die Augenzahl Null beschreibt eine nicht markierte Seite, die entweder zum nochmaligen Würfeln zwingt oder als freie Wahl des Würfelers interpretiert werden kann, siehe unten.

¹⁰Entsprechend der Arbeit ‘Properties of Dice’ von Klaus Æ. Mogenssen [1] ist ein nicht symmetrischer, regulärer, polyedrischer Würfel nicht fair.

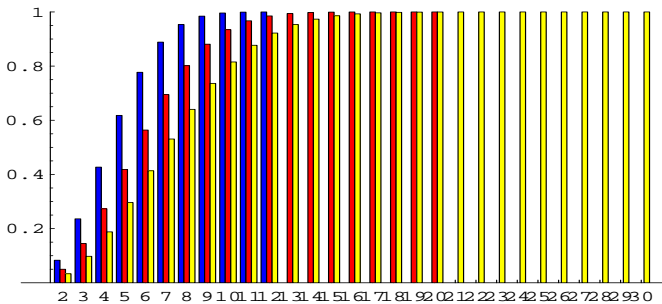
Entsprechendes gilt für n Spieler. Ist $n > m$, gibt es also mehr Spieler als Würfelseiten, kommt es immer zu Stechen, $P_{\text{stechen}}|_{n>m} = 1$. Der besseren Übersicht wegen sind in den folgenden Graphiken nur die von 1 verschiedenen Wahrscheinlichkeiten dargestellt:



Die roten Balken entsprechen dem Ergebnis für einen 4-seitigen Würfel, die gelben für die eines 6-seitigen und die blauen für die eines 12-seitigen.

Entsprechend der Intuition sinkt die Wahrscheinlichkeit für ein Stechen, i.e. die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens zwei Personen die gleiche Augenzahl würfeln, bei gegebener Spielerzahl, mit einer Zunahme der unterschiedlichen Würfelseiten.

Würfel mit mehr Seiten sind in der folgenden Abbildung visualisiert (blau: 12er, rot: 20er und gelb: 30er Würfel):



1.4.2 Berechnung bei 'nicht gleichverteilte Verteilung'

Wie bereits graphisch dargestellt ist die Verteilung der Summe von zwei gleichverteilten Würfeln nicht gleichverteilt, sondern dreiecksverteilt. Die obigen Überlegungen lassen sich somit aufgrund der dort gemachten Annahme der Gleichverteilung nicht anwenden.

Die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Wurfresultate sind nicht mehr gleichwahrscheinlich. Somit ist es wichtig zu wissen, welche Zahl (i) bzw. welche Wahrscheinlichkeit (p_i) der erste Spieler gewürfelt hat. Der zweite Spieler muß damit kein Stechen von nöten ist, eine der verbleibenden Zahlen würfeln. Für $n = 2$ ergibt sich:

$$P_{\text{stechen}} = 1 - p_2(1 - p_2) + p_3(1 - p_3) + \dots + p_{2m}(1 - p_{2m}) = \quad (8)$$

$$= \sum_{i=2}^{2m} p_i^2 \quad (9)$$

Unter Berücksichtigung von

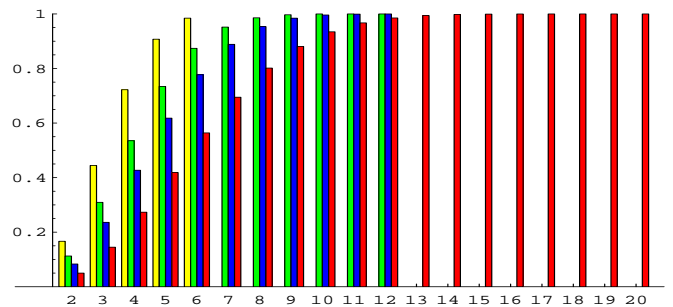
$$1 - p_i = \sum_{j=2, j \neq i}^{2m} p_j \quad (10)$$

erhält man für $n=3$:

$$\begin{aligned} P_{\text{stechen}} &= \sum_{j=2}^{2m} \left(p_j \sum_{i=2, i \neq j}^{2m} \left(p_i \sum_{k=2, k \neq i, k \neq j}^{2m} p_k \right) \right) = \\ &= \sum_{j=2}^{2m} \left(p_j \sum_{i=2, i \neq j}^{2m} \left(p_i (1 - (p_j + p_i)) \right) \right) \quad (11) \end{aligned}$$

Durch eine entsprechend weitere Verschachtelung der Summen kann man die Formeln für $n > 3$ direkt ableiten.

Graphisch ist das Ergebnis für zwei 6er Würfeln in der nachfolgenden Graphik grün dargestellt. Die grünen Säulen für ein Würfelresultat von 10, 11 und 12 konnten mangels Rechenleistung nicht exakt berechnet werden und fehlen deshalb in der folgenden Tabelle und sind in der Graphik mit dem Wert '1' angenähert. Die gelben Säulen entsprechen einem 6er, die blauen einem 12er und die roten einem 20ziger Würfeln:



Aus der Graphik erkennt man, daß die Wahrscheinlichkeit für ein Stechen mit zwei 6er Würfeln (grün) größer ist als für einen 12er Würfel.

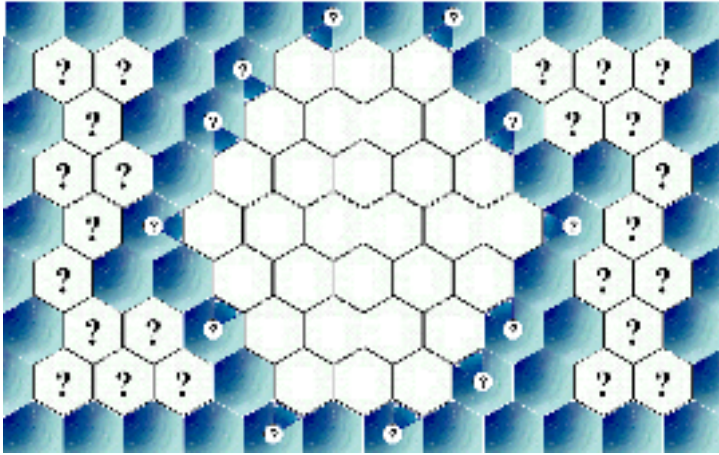
Die exakten Werte sind in der folgenden Tabelle aufgeführt:

n	Würfel					
	4er D-4	6er D-6	12er D-12	2×6er 2× D-6	20er D-20	30-er D-30
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{73}{648}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$
3	$\frac{5}{8}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{17}{72}$	$\frac{401}{1296}$	$\frac{29}{200}$	$\frac{22}{225}$
4	$\frac{29}{32}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{41}{96}$	$\frac{12487}{23328}$	$\frac{1093}{4000}$	$\frac{47}{250}$
5	1	$\frac{49}{54}$	$\frac{89}{144}$	$\frac{25697}{34992}$	$\frac{2093}{5000}$	$\frac{1111}{3750}$
6	1	$\frac{319}{324}$	$\frac{1343}{1728}$	$\frac{13211219}{15116544}$	$\frac{11279}{20000}$	$\frac{1861}{4500}$
7	1	1	$\frac{3071}{3456}$	$\frac{28777613}{30233088}$	$\frac{138953}{200000}$	$\frac{2986}{5625}$
8	1	1	$\frac{39547}{41472}$	$\frac{603546367}{612220032}$	$\frac{3206389}{4000000}$	$\frac{108053}{168750}$
9	1	1	$\frac{122491}{124416}$	$\frac{406921373}{408146688}$	$\frac{17619167}{20000000}$	$\frac{1863583}{2531250}$
10	1	1	$\frac{495739}{497664}$	$\frac{28777613}{30233088}$	$\frac{373810837}{400000000}$	$\frac{20638831}{25312500}$
11	1	1	$\frac{2984059}{2985984}$	$\frac{773810837}{800000000}$	$\frac{773810837}{800000000}$	$\frac{33295081}{37968750}$
12	1	1	$\frac{35829883}{35831808}$	$\frac{15764297533}{16000000000}$	$\frac{15764297533}{16000000000}$	$\frac{1050262789}{1139062500}$

2 ‘Die Siedler von Catan’ House Rules: Mega-Catan

2.1 Material

Für die Spielvariante ‘Mega-Catan’ ist aus dem ‘Gross-Catan’ hergeleitet: Rechte und linke Inseln sind von der Form her identisch, um so ein ausgewogeneres Spielfeld zu erhalten:



Leider benötigt man relativ viel Material:¹³

2.1.1 Material der Spielkästen

6-Ecke	Siedler	Sdl.-Erw.	Seefahrer	Seef.-Erw.
Getreide	4	2	1	
Holz	4	2	1	
Schaf	4	2	1	
Lehm	3	2	2	
Erz	3	2	2	
Wüste	1	1	3	
Wasser	9	2	12	6
Gold			2	1
Chips				
2	1	2	1	
3	2	3	1	
4	2	3	1	
5	2	3	1	
6	2	3	1	
7	–	–	–	–
8	2	3	1	
9	2	3	1	
10	2	3	1	
11	2	3	1	
12	1	2	1	
S.-Pkt.			8	6
Je Farbe				
Straßen	15			
Schiffe			15	
Dörfer	5			
Städte	4			

2.1.2 Benötigtes Material

Die Zentralinsel besteht aus 30 6-ecken, die rechte und linke Insel aus jeweils 12 6-ecken. Die Zentralinsel benötigt ein Wüstenfeld und 29 Rohstofffelder—jedoch keine Goldfelder:

6-Ecke	Mittelinsel	Seiten-Insel	Füllwasser	Σ
Getreide	6	3		9
Holz	6	2		8
Schaf	6	2		8
Lehm	6	2		8
Erz	5	4		9
Gold		2		2
Wüste	1	2		3
Wasser		7	20	27

Je Farbe	Standard	Rundes Catan
Straßen	15	15
Schiffe	15	18
Dörfer	5	5
Städte	8	8

Weiterhin werden die 5 Spezial- und die 6 3:1-Häfen der Seefahrer-Erweiterungen benötigt.

Im Spiel befinden sich 45 Rohstofffelder, 65 Wasserfelder (incl. Ränder).

Das Material ist in zwei Basis-Spiele und zwei Basis-Spiel Erweiterungen sowie Seefahrer und Seefahrer-Erweiterung enthalten—leider fehlen dann noch zwei ‘X-X’ Randstücke, die man kostengünstig durch Wasserfelder ersetzen kann oder eben doch noch in einen zweiten ‘Seefahrer Kasten für 3-4 Personen’ investieren muß:

Kästen	Siedler	Sdl.-Erw.	Seefahrer	Seef.-Erw.
Mega-Catan	2	2	1/2	1

¹³Während der langwierigen Entstehung von Mega-Catan und seiner Unterarten, als also noch nicht offensichtlich war, dass es sich bei Mega-Catan um eine viel interessantere und vor allem fairere Variante als das Originalspiel handelte, haben wir zum Spielen die Catan-Kästen der Mitspieler kombiniert. So waren ohne vorhergehende Investitionen noch umfangreichere Varianten möglich.

2.2 Mega-Catan, Standard, 6 Spieler

Vorbereitung

Alle Rohstofffelder, jedoch nicht die Goldfelder werden gemischt. Die Mittelinsel wird aus den gemischten Sechsecken gezogen und offen hingelegt. Zu dem Rest der Karten werden die Goldfelder und 7 Wasserfelder hinzugegeben und gemischt. Die 12 jeweils fehlenden Felder der beiden Inseln werden verdeckt aufgefüllt, so daß man zum dem in Abschnitt 2.1 angegebenen Spielplan gelangt.

Alle Zahlenchips kommen in den schwarzen Beutel und werden gemischt. Die Felder der Hauptinsel bekommen zufällig einen Chip, wobei darauf geachtet wird, daß keine 6 neben einer 6 oder 8 bzw. keine 8 neben einer 6 oder 8 liegt. Sollte sich dies dennoch ergeben, so wird die entsprechende 6 oder 8 an die nächste mögliche Stelle auf dem Spielplan gelegt.

Die 11 Hafenplättchen werden gemischt und an die angegebenen Stellen plaziert.

Jeder Spieler erhält 5 Siedlungen und 8 Städte plus 15 Straßen und 15 Schiffe.

Paarbildung

Die 6 Spieler bilden 3 Paare, die Partner sitzen sich jeweils gegenüber. Die Partner untereinander dürfen nur Rohstoffkarten tauschen und diese nur im Verhältnis 1:1 und nur dann, wenn einer der Partner am Zug ist, i.e. nicht in der Gründungsphase und nicht in Sonderbauphasen!

Gründungsphase

Jeder Spieler gründet seine beiden ersten Siedlungen auf der Hauptinsel entsprechend den Standardregeln, anstatt einer Straße darf aber auch ein Schiff gebaut werden.

Sonderbauphase

Während ein Spieler einen Zug ausführt dürfen seine Mitspieler eine Sonderbauphase anmelden. Die Sonderbauphase schließt sich direkt an die Bauphase des Spielers an. Hierbei gilt die gleiche Reihenfolge wie im sonstigen Spiel auch: Zuerst ist der dem jetzigen Spieler folgende Spieler mit der Sonderbauphase an der Reihe, dann der nächstfolgende etc. Während der Sonderbauphase kann nicht in Häfen, der Bank oder mit Mitspielern getauscht werden und es kann keine weitere Sonderbauphase angemeldet werden. Nach der Sonderbauphase wird das normale Spiel fortgesetzt.

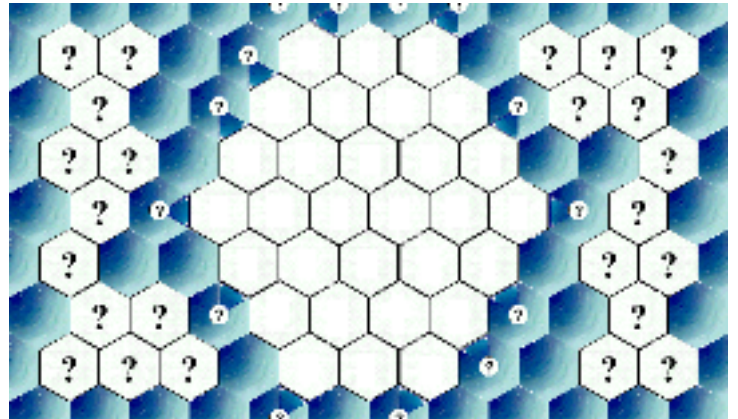
Spielende

Das Spiel endet, sobald ein Spieler 18 Siegpunkte erreicht hat.

2.3 Die Welt ist rund

Umsegeln von Catan

Wie die Erde ist Catanien jetzt rund, d.h. man kann von der einen Spielfeldseite über den Rand zur anderen segeln¹⁴. Von West nach Ost mit 2 Segelschiffen, von Nord nach Süd mit nur einem Segelschiff¹⁵.



Jeder Spieler erhält 3 zusätzliche Schiffe, also insgesamt 5 Siedlungen und 8 Städte plus 15 Straßen und 18 Schiffe.

Ansonsten gelten die oben beschriebenen Standardregeln.

2.4 Verschärft

Nur 7 Zahlen-Chips (2, 3, 4, 5, 9, 10, 11) kommen bei 24 zu entdeckenden Sechseckfeldern¹⁶ in den Beutel.

Umlegen der Zahlen-Chips

Sobald ein Spieler ein Schiff (später auch Straße) setzt, an deren Ende eine Landschaft ohne Zahlen-Chip liegt, zieht der Spieler aus dem Beutel per Zufall einen Zahlen-Chip und legt ihn auf diese Landschaft.

Sind die Zahlen-Chips aus dem Beutel alle eingesetzt, muß der Spieler den fehlenden Zahlen-Chip von der Hauptinsel wegnehmen und auf die Insel-Landschaft legen. Dabei gelten die folgenden Regeln:

1. Der Spieler darf einen Zahlen-Chip nur von einer solchen Landschaft wegnehmen, an der er selbst mindestens eine Siedlung oder Stadt stehen hat.
2. Jeder Siedlung oder Stadt auf der Hauptinsel muß mindestens eine Landschaft mit einem Zahlen-Chip verbleiben. Keine Siedlung oder Stadt auf der Hauptinsel darf also völlig ohne Rohstoff-Erlöse sein!
3. Auch auf den kleinen Inseln dürfen rote Zahlen-Chips nicht nebeneinander liegen.

Wenn ein Spieler bei der Befolgung dieser Regeln keinen Zahlen-Chip von der Hauptinsel wegnehmen dürfte, ist es ihm erlaubt, diese Regeln in der Reihenfolge der Regelnummern zu brechen, bis ihm die Wegnahme eines Zahlen-Chips möglich ist.

Ansonsten gelten die oben beschriebenen Regeln von 'Die Welt ist rund'.

¹⁴ Eigentlich ist Catanien bei der gegebenen Beschreibung gar nicht rund, sondern ein Torus. Ein Rechteck läßt sich nämlich nicht verzerrungsfrei auf eine Kugel projizieren. Verbindet die Ost- und die West-Seiten miteinander, so entsteht ein Zylinder. Werden jetzt auch noch Nord- und Süd-Seite miteinander verbunden, so gelangt man zu einem Torus (Doughnut).

¹⁵ Hierbei ist zu beachten, daß die Regel, daß ein Dorf immer zwei Kantentlängen von einem Anderen entfernt liegen muß, in den Fällen nicht gilt, in denen Wasser zwischen den Landfeldern liegt!

¹⁶ Zu beachten ist hier allerdings, daß nicht alle der 24 Felder Rohstofffelder sind und somit nicht alle 24 Felder einen Zahlenchip benötigen.

2.5 Hammerhart

Hafenbaukosten

Die Errichtung der Häfen kostet Rohstoffe:



Errichtet werden dürfen die Häfen nur an den im Spielplan ausgewiesenen Stellen.

Sondersiegepunkte für Entdecker

Es gibt einen Sonder-Siegepunkt für das Erreichen von fremden Inseln. Für seine erste Siedlung, die ein Spieler auf einer fremden Insel gründet, erhält er einen Sonder-Siegepunkt. Eine Insel muß vollständig von Wasser umgeben sein, kann jedoch auch nur ein Sechseck groß sein.

Ansonsten gelten die oben beschriebenen 'Verschärft'en Regeln.

2.6 D-12 Mania

D-12 als Zahlenchip

Die Zahlenchips werden durch D-12 Würfel ersetzt:¹⁷ Auf jedem Rohstofffeld der Hauptinsel liegt ein Würfel, der zu Beginn des Spieles geworfen wurde. Die Zahl auf dem D-12 Würfel entspricht dem Zahlenchip. Rohstoffe werden bei Gleichheit von D-12 Würfel und normalen Spielwürfel ausgezahlt.

Spielt man mit zwei 6er Würfeln, so kann die 1 nicht fallen, das entsprechend besetzte Feld ist also ohne Ertrag.

Der Räuber

Der Wurf einer 7 ist am wahrscheinlichsten ($1/6$). Auch hier werden die entsprechenden Rohstoffe ausgeteilt und erst danach die Zahl der Karten gezählt. Ist diese bei einem Spieler größer als 7, so muß dieser Spieler mindestens die Hälfte der Karten abgeben. Dann muß entweder Räuber oder Seeräuber umgesetzt werden. Wird der Räuber von einem Feld entfernt, so wird der D-12 Würfel erneut geworfen und das Rohstofffeld bekommt eine neue Wertigkeit. Welche Zahlen auf benachbarten Sechseckfeldern nebeneinander liegen ist ohne Bedeutung.

Ansonsten gelten die oben beschriebenen 'Hammerhart'en Regeln.

2.7 D-12 Madness

Zusätzlich zur 'D-12 Mania' wird an jede Stelle von der der Seeräuber entfernt wird ein D-12 Würfel gelegt (natürlich nachdem dieser geworfen wurde). So produzieren dann die Wasserfelder entsprechend des D-12 Würfels und zwar je nach Wahl ein Lehm oder ein Erz. Wird der Räuber oder Seeräuber von einem Feld entfernt, so wird der entsprechende D-12 Würfel des freigegebenen Feldes erneut geworfen und das Feld bekommt eine neue Wertigkeit. Welche

¹⁷Aufgrund der nicht geringen Anzahl von D-12 Würfeln (30 für die Hauptinsel, plus 15 für die beiden kleinen, zu entdeckenden Inseln) sollte man diese aus Kosten- und Verfügbarkeitsgründen im Großhandel, also z.B. bei [4] erwerben. Dies gilt natürlich um so mehr für die D-12 Madness mit zusätzlichen 65 D-12 Wasserwürfeln.

Zahlen auf benachbarten Sechseckfeldern nebeneinander liegen ist ohne Bedeutung.

Ansonsten gelten die oben beschriebenen Regeln der 'D-12 Mania'.

Literatur

- [1] Properties of Dice
Als HTML: <http://hjem.get2net.dk/Klaudius/Dice.htm>
Als .PDF: http://www.geocities.com/junge_m/prop_dice.pdf
Klaus Æ. Mogensen
- [2] Fair Dice
3D-Animationen: <http://mathworld.wolfram.com/Isohedron.html>
Grundüberlegungen: <http://mathworld.wolfram.com/Dice.html>
Mathematica Notebook: <http://mathworld.wolfram.com/notebooks/FairDice.m>
Weisstein, E. W.
- [3] Fair Dice
Diaconis, P.; Keller, J. B.
Amer. Math. Monthly 96, 337-339, 1989
- [4] Dice & Games Hobby Games Accessories
Dice & Games, Ltd
<http://www.dice.co.uk/hob.htm>
- [5] Fair Dice
<http://www.mathpuzzle.com/Fairdice.htm>
Pegg, E. Jr.
- [6] Dice with Fair Sums
Robertson, L. C.; Shortt, R. M.; Landry, S. G.
Amer. Math. Monthly 95, 316-328, 1988.
- [7] Univariate Discrete Distributions
Johnson, N.L.; Kotz, S.; Kemp, A.W.
John Wiley & Sons, 1993
ISBN 0-471-54897-9
- [8] Anti-Monopoly
Anspach, R.
<http://www.antimonopoly.com/>
- [9] Monopoly
<http://www.monopoly.com/>