Teams

Das Problem mit dem alles anfing lautete so[1]:

Um den besten Doppelspieler des Tennis-Clubs Lopflop zu ermitteln, hat man sich für die Vereins-Meisterschaft auf den folgenden Austragungsmodus geeinigt:
Jedes mögliche Paar soll gegen jedes mögliche gegnerische Paar spielen. "Das sind ja mindestens 400 Spiele," schätzt der Platzwart mit Schrecken. "Richtig, aber höchstens 900," beruhigt ihn der Vorsitzende. Wieviele Mitglieder nehmen an der Vereinsmeisterschaft teil?

Mit dem Wissen, daß $\binom{N}{k}$ die Anzahl der Möglichkeiten angibt mit der man k Teile aus einer Grundgesamtheit von N Teilen nehmen kann und $N!$ die Anzahl der Anordnung von N Elementen angibt läßt sich das Problem lösen:
Zuerst definiert man:

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{(N-k)!\,k!} \tag{1}$$

Nun geht es aber los:
Aus der Masse aller Spieler (N) sucht man zwei ($m = 2$) heraus, die dann das erste Paar bilden. Hierfür gibt es $\binom{N}{2}$ Möglichkeiten. Aus den restlichen $N-2$ Mitgliedern wählt man wiederum 2 aus, also $\binom{n-2}{2}$, die das zweite Paar bilden. Das Produkt dieser beiden Häufigkeiten gibt dann die Zahl der Spielvariationen — Halt! Jetzt wurde aber doppelt gezählt, denn es ist egal ob man ein Paar als erstes oder als zweites zieht. Ob die Begegnung $AB : CD$ lautet oder $CD : AB$ macht keinen Unterschied. Also muß man durch 2 teilen und erhält somit für die Zahl der Spiele (S):

$$S = \frac{1}{2}\binom{N}{2}\binom{N-2}{2} \tag{2}$$

Es gibt Leute, die meinen, daß man das Problem eleganter lösen kann und die gehen so vor[2]:
Aus der Zahl aller Spieler wähle man die aus, die spielen werden und bestimme dann die Zahl der verschiedenen Spiele, die diese Personen ausführen können. Aus den N Spielern wählt man also $2\,m$ aus, wofür es $\binom{N}{2\,m}$ Möglichkeiten gibt. Willkürlich und ohne Beschränkung der Allgemeinheit legt man jetzt fest, daß der erste der $2\,m$ Spieler immer nur in der ersten Mannschaft spielt. Somit hat man noch die Verteilung von $2\,m-1$ Spielern festzulegen. Für die erste Manschaft braucht man noch $m-1$ Spieler, für die es $\binom{2\,m-1}{m}$ Auswahlmöglichkeiten gibt. Sind die Spieler der ersten Mannschaft festgelegt, so sind es die Spieler der zweiten auch, da ja nur die $2\,m$ Spieler betrachtet wurden, die auch wirklich spielen sollten. Somit erhält man

$$S = \binom{2\,m-1}{m-1}\binom{N}{2\,m} \tag{3}$$

Mit Hilfe von

$$\binom{2N-1}{N} = \binom{2N-1}{N-1}, \quad \text{und} \tag{4}$$

$$\binom{2N}{N-1} = \binom{2N}{N+1} \tag{5}$$

kann man

$$S = \binom{2\,m-1}{m}\binom{N}{2\,m} \tag{6}$$

schreiben. Auch diese Formel kann man herleiten: Aus den N potentiellen Spielern werden $2\,m$ ausgewählt, also $\binom{N}{2\,m}$. Wieder wird willkürlich und ohne Beschränkung der Allgemeinheit festgelegt, daß der erste der $2\,m$ Spieler immer nur in der ersten Manschaft spielt. Für die zweite Mannschaft braucht man noch m Spieler aus den verbleibenden $2\,m-1$. Hierfür gibt es $\binom{2\,m-1}{m}$ Auswahlmöglichkeiten.

[1]Problem des Monats, Spektrum 11/1996 Seite 33
[2]Hallo, Hans-Peter

Eleganz oder nicht, im Ende ist das alles das Gleiche, da man die beiden Lösungen ineinander umformen kann:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\binom{N}{2}\binom{N-2}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{N!}{(N-2)!\,2!}\,\frac{(N-2)!}{(N-4)!\,2!} = \\ &= \frac{1}{8}\,\frac{N!}{(N-4)!} = 3\,\frac{N!}{(N-4)!4!} = \binom{3}{2}\binom{N}{4} \end{aligned}$$

Wobei der letzte Term nichts anderes als Gleichung 6 mit $m = 2$ ist. Wenn man sich die letzten Gleichungschritte noch einmal unter einem anderen Aspekt anschaut, so kann man feststellen, daß man aus $S = \frac{1}{8}\frac{N!}{(N-4)!}$ noch mehr machen kann:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{8}\,\frac{N!}{(N-4)!} = \frac{1}{8}\,N\,(N-1)(N-2)(N-3) = \\ &= \frac{N^4 - 6N^3 + 11N^2 - 6N}{8} \end{aligned} \tag{7}$$

An dieser Darstellung der Gleichung für S sieht man, daß die Zahl der Spiele nur polynomial ansteigt und nicht etwa exponentiell oder faktoriell (i.e. mit $N!$), wie man auf den ersten Blick vermuten könnte.
Um die Zahl der Spiele zu bestimmen, kann man in eine der Gleichungen 2, 3, 6 oder 7, einsetzten. Da bei der Berechnung der Binominal-Koeffizienten sehr große Zwischenergebnisse auftreten können, die unter Umständen zu Rundungsfehlern führen, ist es einfacher in Gleichung 7 einzusetzten und sich somit keine weiteren Gedanken über irgendwelche Überläufe machen zu müssen. Man erhält die folgende Tabelle für S:

n	4	5	6	7	8	9	10	11
S	3	15	45	105	210	378	630	990

Die Lösung ist in diesem Falle $n = 10$, da $400 < S(n = 10) < 900$.

Für einige Spiele werden mehr als zwei Paare pro Spiel benötigt. Für k Paare kann man entsprechend der obigen Ableitung schreiben:

$$S = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}\binom{N-2i}{2} \tag{8}$$

Der Bruch $\frac{1}{k!}$ stellt sicher, daß jede Kombination von Spielerpaaren nur einmal gezählt wird: für k Paare gibt es $k!$ Möglichkeiten diese anzuordnen.
Noch allgemeiner kann man werden, wenn man k Mannschaften zu m Spielern zugrunde legt:

$$S = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}\binom{N-m\,i}{m} \tag{9}$$

Mit dem zweiten Lösungsansatz erhält man die folgende Gleichung:

$$S = \binom{N}{k\,m}\prod_{i=0}^{k-2}\binom{(k-i)\,m-1}{(k-i-1)\,m} \tag{10}$$

Und auch hier kann man wieder zeigen, daß die beiden Gleichungen identisch sind:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}\binom{N-m\,i}{m} = \\ &= \frac{1}{k!}\,\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(N-m\,i)!}{\prod_{i=0}^{k-1}(N-m(i+1))!\,\prod_{i=0}^{k-1}m!} = \\ &= \frac{1}{k!}\,\frac{1}{m!^k}\,\frac{N!\,(N-m)!(N-2m)!\cdots(N-m(k-1))!}{(N-m)!(N-2m)!\cdots(N-(k-1)m)!(N-k\,m)!} = \\ &= \frac{1}{k!\,m!^k}\,\frac{N!}{(N-k\,m)!} = \qquad (11)\\ &= \frac{(k\,m)!}{k!\,m!^k}\,\frac{N!}{(k\,m)!(N-k\,m)!} = \frac{(k\,m)!}{k!\,m!^k}\binom{N}{k\,m} \qquad (12) \end{aligned}$$

Jetzt ist nur noch zu zeigen, daß

$$\frac{(k\,m)!}{k!\,m!^k} = \prod_{i=0}^{k-2} \binom{(k-i)\,m-1}{(k-i-1)\,m} \tag{13}$$

(vergleiche Gleichung 10). Durch Ausmultiplizieren des Produktes erhält man:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=0}^{k-2} \binom{(k-i)\,m-1}{(k-i-1)\,m} &= \\
&= \binom{k\,m-1}{(k-1)\,m}\binom{(k-1)\,m-1}{(k-2)\,m}\cdots \\
&\quad \cdots\binom{3m-1}{2m}\binom{2m-1}{m} = \\
&= \frac{(k\,m-1)!}{((k\,m-1)-(k-1)\,m)!((k-1)\,m)!}\cdot \\
&\quad \cdot\frac{((k-1)\,m-1)!}{(((k-1)\,m-1)-(k-2)\,m)!((k-2)\,m)!}\cdots \\
&\quad \cdots\frac{(3m-1)!}{(3m-1-2m)!(2m)!}\frac{(2m-1)!}{(m-1)!m!} = \\
&= \frac{(k\,m-1)!}{(m-1)!(k-1)\,m)!}\frac{((k-1)\,m-1)!}{(m-1)!((k-2)\,m)!}\cdots \\
&\quad \cdots\frac{(3m-1)!}{(m-1)!(2m)!}\frac{(2m-1)!}{(m-1)!m!} = \\
&= \frac{1}{(m-1)!^{k-1}}\frac{(k\,m-1)!}{(k-1)\,m}\frac{1}{(k-2)m)}\cdots\frac{1}{2m}\frac{1}{m!} = \\
&= \frac{(k\,m-1)!}{(m-1)!^{k-1}}\frac{1}{m^{k-1}}\frac{1}{(m-1)!}\frac{1}{(k-1)!} = \\
&= \frac{(k\,m)!}{k\,m}\frac{m^k}{m!^k}\frac{m}{m^k}\frac{k}{k!} = \\
&= \frac{(k\,m)!}{k!m!^k}
\end{aligned}$$

Somit gilt Gleichung 13. Also sind auch die Gleichungen 9 und 10 identisch:

$$S = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}\binom{N-m\,i}{m} == \binom{N}{k\,m}\prod_{i=0}^{k-2}\binom{(k-i)\,m-1}{(k-i-1)\,m}$$

Und genau dies sollte gezeigt werden.

Es sei angemerkt, daß der erste Term in Gleichung 11 konstant ist und man den zweiten Term als Polynom schreiben kann:

$$\frac{N!}{(N-k\,m)!} = \prod_{i=0}^{k\,m-1}(N-i)$$

Es handelt sich also um ein Polynom des Grades: $m\,k$.
Somit handelt es sich wiederum um ein polynomialen Anstieg der Zahl der Spiele mit der Spielerzahl.

Statt nach Lösungen mit mehreren Paaren zu suchen ist es viel schöner die Lösung auf Mixed-Doppel-Spiele zu erweitern. Mit dem zweiten Lösungsansatz erhält man die Gleichung:

$$S = \binom{m-1}{m/2-1}\binom{m}{m/2}\binom{W}{m}\binom{M}{m} \tag{14}$$

Hierbei sucht man gemischte Mannschaften zu je m Spielern. Die Anzahl der Frauen und Männer je Manschaft ist gleich. Hieraus ergibt sich, daß m gerade ist. Die Gesamt-Zahl der betrachteten Personen ist $N = M + W$. Ansonsten ist die Herleitung analog zum ersten Fall: Sowohl aus der weiblichen wie aus der männlichen Grundgesamtheit wählt man m Spieler aus, hierfür gibt es $\binom{W}{m}\binom{M}{m}$ Kombinationen. Wiederum teilt man einen der Spieler willkürlich zur ersten Mannschaft zu und wähle die restlichen Spieler seines Geschlechts für seine Mannschaft aus, i.e. $\binom{m-1}{m/2-1}$. Für die anderen Teilnehmer seiner Mannschaft gibt es $\binom{m}{m/2}$ Möglichkeiten der Auswahl. Somit ist die Formel erklärt.

Mit Hilfe der Gleichung 5 kann man Gleichung 14 auch zu

$$S = \binom{m-1}{m/2}\binom{m}{m/2}\binom{W}{m}\binom{M}{m} \tag{15}$$

schreiben.

Mit der ersten Art der Herleitung, wenn auch nicht so elegant wie die zweite, erhält man für die Zahl der Mixed-Double Spiele:

$$S = \frac{1}{2}\binom{W}{\frac{m}{2}}\binom{M}{\frac{m}{2}}\binom{W-\frac{m}{2}}{\frac{m}{2}}\binom{M-\frac{m}{2}}{\frac{m}{2}} \tag{16}$$

Allgemeiner kann man für k Mannschaften mit je m Spielern die Gleichung herleiten:

$$S = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}\binom{W-\frac{m}{2}\,i}{\frac{m}{2}}\binom{M-\frac{m}{2}\,i}{\frac{m}{2}} \tag{17}$$

Daß diese beiden Lösungen wieder das gleiche auf zwei verschiedene Arten darstellen, kann man durch einige Umformungen zeigen:

$$S = \frac{1}{2}\binom{W}{\frac{m}{2}}\binom{M}{\frac{m}{2}}\binom{W-\frac{m}{2}}{\frac{m}{2}}\binom{M-\frac{m}{2}}{\frac{m}{2}} =$$

$$\frac{1}{2}\frac{W!}{(W-\frac{m}{2})!(\frac{m}{2})!}\frac{M!}{(M-\frac{m}{2})!(\frac{m}{2})!}\frac{(W-\frac{m}{2})!}{(W-m)!(\frac{m}{2})!}\frac{(M-\frac{m}{2})!}{(M-m)!(\frac{m}{2})!}$$

Zuerst sieht man, daß die Ausdrücke $(W - m/2)!$ bzw. $(M - m/2)!$ im Nenner und im Zähler stehen, also gekürzt werden können:

$$S = \frac{1}{2}\frac{W!}{(\frac{m}{2})!}\frac{M!}{(\frac{m}{2})!}\frac{1}{(W-m)!(\frac{m}{2})!}\frac{1}{(M-m)!(\frac{m}{2})!}$$

Bildet man jetzt die Ausdrücke $\binom{W}{m}$, $\binom{M}{m}$, so erhält man:

$$S = \frac{1}{2}\binom{W}{m}\binom{M}{m}m!^2\frac{1}{(\frac{m}{2})!^4}$$

Weiterhin ist bekannt, daß

$$\begin{aligned}
\binom{m}{\frac{m}{2}} &= \frac{m!}{(\frac{m}{2})!^2} \\
\binom{m-1}{\frac{m}{2}} &= \frac{(m-1)!}{(\frac{m}{2}-1)!(\frac{m}{2})!} = \frac{\frac{m!}{m}}{\frac{(\frac{m}{2})!}{\frac{m}{2}}(\frac{m}{2})!} = \frac{1}{2}\frac{m!}{(\frac{m}{2})!(\frac{m}{2})!} = \\
&= \frac{1}{2}\frac{m!}{(\frac{m}{2})!^2}
\end{aligned}$$

Also ist

$$\frac{1}{2}m!^2\frac{1}{(m/2)!^4} = \binom{m}{\frac{m}{2}}\binom{m-1}{\frac{m}{2}}$$

und somit

$$S = \frac{1}{2}\binom{W}{m}\binom{M}{m}m!^2\frac{1}{(\frac{m}{2})!^4} = \binom{m-1}{\frac{m}{2}}\binom{m}{\frac{m}{2}}\binom{W}{m}\binom{M}{m}$$

Und das ist die zweite Formel (15). Also gilt:

$$\frac{1}{2}\binom{W}{\frac{m}{2}}\binom{M}{\frac{m}{2}}\binom{W-\frac{m}{2}}{\frac{m}{2}}\binom{M-\frac{m}{2}}{\frac{m}{2}} = \binom{m-1}{\frac{m}{2}}\binom{m}{\frac{m}{2}}\binom{W}{m}\binom{M}{m}$$

So, jetzt ist die Mannschaftsaufteilung hoffentlich abschließend bearbeitet und als Nachtrag bleibt nur noch die Tabelle mit den Variablen und ihrer Bedeutung:

Var.	Bedeutung
N	Zahl der für Spiele zur Verfügung stehenden Mitglieder
W	Zahl der weiblichen Mitglieder
M	Zahl der männlichen Mitglieder
k	Zahl der Mannschaften
m	Zahl der Spieler pro Mannschaft
S	Zahl der Spiele